



Kahramanmaraş Sütçü İmam University

Journal of Engineering Sciences



Geliş Tarihi : 12.07.2022
Kabul Tarihi : 14.09.2022

Received Date : 12.07.2022
Accepted Date : 14.09.2022

İŞLEVSEL DERECELENDİRİLMİŞ DAİRESEL BİR KANATÇIĞIN TERMOELASTİK DAVRANIŞININ SAYISAL İNCELENMESİ

NUMERICAL INVESTIGATION OF THERMOELASTIC BEHAVIOR OF A FUNCTIONALLY GRADED ANNULAR FIN

Ali YILDIRIM¹ (ORCID: 0000-0001-5894-8986)
Mehmet EKER^{2*} (ORCID: 0000-0002-6785-1710)
Durmuş YARIMPABUÇ³ (ORCID: 0000-0002-8763-1125)
Volkan ARIKAN⁴ (ORCID: 0000-0002-6102-6584)
Kerimcan ÇELEBİ⁵ (ORCID: 0000-0001-6294-0872)

¹ Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Osmaniye Meslek Yüksekokulu, Osmaniye, Türkiye,

² Tarsus Üniversitesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Mersin, Türkiye,

³ Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Matematik Bölümü, Osmaniye, Türkiye,

⁴ Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Osmaniye, Türkiye,

⁵ Çukurova Üniversitesi, Ceyhan Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Adana, Türkiye.

*Sorumlu Yazar / Corresponding Author: Mehmet EKER, mehmeteker@tarsus.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada, mekanik ve ısı özellikleri radyal eksen boyunca üstel bir fonksiyonla değişen, eksenel simetrik, ince, dikdörtgen profilili dairesel bir kanatçıktaki sıcaklık dağılımı ve sıcaklık farklarından dolayı oluşan ısı gerilmeleri, pseudospectral Chebyshev ve sonlu elemanlar yöntemleri ile ele alınmıştır. Chebyshev yöntemin doğruluğu literatürde mevcut analitik çözümle karşılaştırılarak test edilmiştir. Kanatçık, $ZrO_2/Ti - 6Al - 4V$ malzeme çifti ile derecelendirilmiş, belirlenen sınır koşullarında sıcaklık dağılımı ve ısı gerilmeleri elde edilmiştir. Problem, pseudospektral Chebyshev ve sonlu elemanlar yöntemleri ile ayrı ayrı çözülmüş ve elde edilen sonuçlar grafiksel olarak karşılaştırılmıştır. Pseudospektral Chebyshev yönteminin sonlu elemanlar yöntemine göre daha az nokta sayısı ile yakın sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dairesel kanatçık, ısı gerilme, işlevsel derecelendirilmiş malzeme, pseudospectral Chebyshev yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi

ABSTRACT

In this study, temperature distribution and thermal stresses due to temperature differences in an axisymmetric, thin, rectangular profile circular fin, whose mechanical and thermal properties are changed with an exponential function along the radial axis, are discussed by pseudospectral Chebyshev and finite element methods. The accuracy of the Chebyshev method is tested by comparing it with the analytical benchmark solution available in the literature. The fin is graded with $ZrO_2/Ti - 6Al - 4V$ material pair, temperature distribution and thermal stresses are obtained under the particular boundary conditions. The problem is solved separately by pseudospectral Chebyshev and finite element methods and the results are compared graphically. It has been observed that the pseudospectral Chebyshev method gives very close results with finite element results despite using less number of points.

Keywords: Annular fin, thermal stresses, functionally graded materials, pseudospectral Chebyshev method, finite element method

ToCite: YILDIRIM, A., EKER, M., YARIMPABUÇ, D., ARIKAN, V., ÇELEBİ, K., (2022).İŞLEVSEL DERECELENDİRİLMİŞ DAİRESEL BİR KANATÇIĞIN TERMOELASTİK DAVRANIŞININ SAYISAL İNCELENMESİ. *Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 25(4), 602-614.

GİRİŞ

Mühendislik uygulamalarında, aktarılan ısı miktarını artırmak için tasarlanan genişletilmiş yüzeylere kanatçık adı verilir. Endüstriyel uygulamadaki ihtiyaca göre kanatçıklar; uzunlamasına, dairesel, düz, iğne tipi gibi farklı kesitlere ve üçgen, konveks, konkav, dikdörtgen gibi farklı profillere sahip olabilmektedirler. Kullanışlı bir yapıya sahip olması, ısıl başarımının iyi olması ve birçok kanatçık profiline kıyasla üretim maliyetlerinin düşük olması sebebi ile kompresörlerde, ısı eşanjörleri, içten yanmalı motorlarda vb. bazı uygulamalarda dairesel kanatçıklar sıklıkla tercih edilmektedir (Kraus et al., 2001).

Pekçok mühendislik probleminde olduğu gibi kanatçıklarda ısı aktarımı ile ilgili çözümler yapılırken bazı kabuller ve varsayımlar yapılır. Bu kabul ve varsayımlardan Gardner (Gardner, 1945) çalışmasında bahsetmiş, farklı türdeki kanatçıkların verimlerini bulmuştur. Literatürde, kanatçık verimi ve etkinliğinin incelenmesi, kanatçık boyutlarının ve profilinin optimizasyonu ile ilgili çalışmalara rastlamak mümkündür (Arslantürk, 2009; Aziz & Fang, 2010; Iborra & Campo, 2009; Kundu, 2017; Peng & Chen, 2011; Roy & Ghosal, 2017).

Isı aktarımı esnasında kanatçıkta meydana gelen sıcaklık farkları, ısıl genleşmelere, ısıl genleşmeler ise ısıl gerilmelerin oluşmasına sebebiyet vermektedir. Isıl gerilmeler malzemede yorulma, sürünme, çatlak oluşumu ve ilerlemesi gibi kanatçık ömrünü azaltan mekanik kusurlara yol açabilmektedir. Bu sebeple doğru kanatçık tasarımı ve uygun malzeme seçimi için ısıl gerilmelerin de belirlenmesi önemlidir (Wu, 1997). Literatürde homojen kanatçıklara ait ısı iletimi ve ısıl gerilme çalışmaları (Wu, 1997; Mallick et al., 2015; Wang, Liao ve Yang (2013) mevcut olsa da kanatçığın maruz kalacağı zorlanmaları, gerilmeleri en aza indirmek ve yapısal bütünlüğünü korumasına yönelik önerilen çözümlerden birisi de derecelendirilmiş malzeme kullanımıdır. İşlevsel derecelendirilmiş malzemeler en az iki farklı malzemenin istenilen doğrultularda ve oranlarda ele alınan geometri üzerinde dağılımıyla oluşturulur. Genellikle seramik-metal bileşiminden oluşturulan işlevsel derecelendirilmiş (İD) malzeme fikri, 1984 yılında yüksek sıcaklığa dayanıklı ısıl bariyer elde etmek amacıyla Japon bilim insanları tarafından ortaya atılmıştır (Koizumi, 1997).

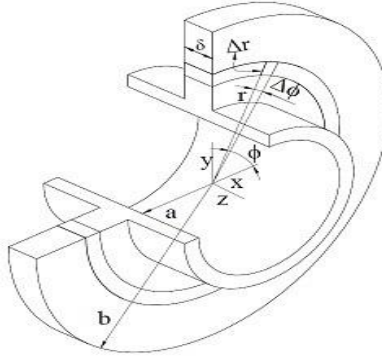
İD malzeme modelinin kullanıldığı kanatçıklarda sıcaklık dağılımı ve kanatçık verimi ile ilgili çalışmalar literatürde mevcuttur (Aziz & Rahman, 2009; Aziz, Torabi ve Zhang, 2013; Gaba, Tiwari ve Bhowmick, 2014, 2016; Khan ve Aziz, 2012; Lee et al., 2012). İşlevsel derecelendirilmiş malzemelerde termoelastik çalışmalar olmakla birlikte işlevsel derecelendirilmiş dairesel kanatçıklardaki ısıl gerilme analizi içeren çalışma sayısı nispeten azdır (Tütüncü & Temel, 2013).

Eksenel simetrik, kalınlığı çapına göre oldukça küçük, kuvvet kuralına göre derecelendirilmiş dairesel bir kanatçıktaki ısıl gerilmeler Yıldırım et al. tarafından hem kararlı (Yıldırım, Yarımabaç ve Çelebi, 2019a, 2019b), hem de geçici durum (Yıldırım, Yarımabaç ve Çelebi, 2020) için incelenmiştir. Poisson oranının sabit olduğu varsayımı ile kararlı durum (Yıldırım et al., 2019a) için analitik, geçici durum (Yıldırım, Yarımabaç ve Çelebi, 2020) için yarı analitik bir çözüm sunulmuştur. Aynı zamanda kararlı durumda Poisson oranında değişken olduğu durum (Yıldırım et al., 2019b), tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. İD dairesel kanatçığın ısıl elastik davranışı, Ranjan et al. (Ranjan, Mallick ve Jana, 2019) tarafından sıcaklığa bağlı ısı transfer katsayısı ve iç ısı üretimi dikkate alınarak incelenmiştir. Kanatçıktaki ısıl gerilmelerin analitik değerlendirmesini, boyutsuz yarıçapın logaritmik ve kuvvet fonksiyonuna bağlı değişimlerine göre homotopi pertürbasyon yöntemi kullanılarak yapmışlardır. Yontar et al. (Yontar, Aydın ve Keleş, 2020) dairesel kanatçığın kararlı durum ısıl başarımını ısıl iletkenliğinin kuvvet fonksiyonu ve eksponansiyel radyal yönde değiştiği varsayımı ile incelemişlerdir. Elde ettikleri tek boyutlu değişken katsayılı diferansiyel denklemi tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi kullanılarak çözmüşlerdir.

Literatürde, kapalı form ve sayısal çözüm yöntemleri kullanılarak işlevsel derecelendirilmiş kanatçıkların sıcaklık ve gerilme dağılımlarını iyileştirmeyi amaçlayan çalışmalar yapıldığı görülmektedir. Bu çalışma, belirli bir geometri ve çalışma koşullarında, üstel fonksiyon ile derecelendirilmiş dairesel kanatçığın seçilen malzeme çifti (seramik-metal) için maruz kalacağı sıcaklık, radyal ve teğetsel gerilme dağılımlarını farklı çözüm yöntemleri ile incelemeyi amaçlamaktadır. Problem, pseudospektral Chebyshev ve paket program kullanarak sonlu elemanlar yöntemi ile çözülmüştür. Pseudospektral Chebyshev yöntemin yakınsaması, örgü nokta sayılarına göre test edilmiştir.

MATERYAL VE YÖNTEM

İşlevsel derecelendirilmiş, eksenel olarak simetrik, ince ve kalınlığı her yerde aynı olan Şekil 1’deki gibi dikdörtgen profilli dairesel bir kanatçık problemi ele alınmıştır. Isıl dengeye ulaştığı varsayılan kanatçıkta herhangi bir ısı üretimi ya da tüketimi olmadığı, çevre sıcaklığının sabit olduğu ve sıcaklığın değişmesi ile mekanik ve ısı özelliklerin değişmediği farz edilmiştir. Kanatçık kalınlığının çapına göre çok düşük olması nedeni ile kanatçık ucundaki ısı kaybı çok düşük olacaktır. Bu sebeple kanatçık uç kısmındaki ısı kaybı ihmal edilmiş ve uç kısmının izole edildiği düşünülmüştür. Kanatçık yüzeyi boyunca sadece taşınım ile ısı kaybı olduğu kabul edilmiş ve ışıınım ile ısı kaybı ihmal edilmiştir. Ayrıca kanatçık boyunca iç kuvvetlerin, yüzeylerde ise herhangi bir etkileşimin (traction-free) olmadığı varsayılmıştır.



Şekil 1. Dairesel Kanatçık

Isıl Gerilmeleri Tarif Eden Denklemler

Sabit kalınlıkta 2D dairesel bir kanatçıktaki elastik modül, Poisson oranı, ısı iletkenlik ve lineer ısı genleşme katsayılarının radyal eksen boyunca üstel bir fonksiyona bağlı değiştiği kabul edilmiştir. Eksenel simetrik, ince dairesel bir kanatçıktaki sıcaklık-gerilme-gerinim ilişkisini ifade eden denklemler,

$$\sigma_r = \frac{E(r)}{1 - \nu^2(r)} [\varepsilon_r + \nu(r)\varepsilon_\phi - (1 + \nu(r))\alpha(r)T] \quad (1)$$

$$\sigma_\phi = \frac{E(r)}{1 - \nu^2(r)} [\varepsilon_\phi + \nu(r)\varepsilon_r - (1 + \nu(r))\alpha(r)T] \quad (2)$$

gerilme gerinim denge denklemi,

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = 0 \quad (3)$$

gerinim – yer değiştirme ilişkileri,

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\phi = \frac{u}{r} \quad (4)$$

ve sınır koşulları,

$$\sigma_r(a) = 0 \quad (5)$$

$$\sigma_r(b) = 0 \quad (6)$$

şeklinde (Timoshenko & Goodier, 1970). Burada, a ve b kanatçık iç ve dış yarıçapı, r ve ϕ polar koordinatları, σ_r ve σ_ϕ radyal ve teğetsel gerilmeleri, ε_r ve ε_ϕ radyal ve teğetsel gerinimleri, radyal yönde değişen $E(r)$, $\alpha(r)$, $\nu(r)$ gibi malzeme özellikleri de kanatçık üzerinde herhangi bir noktadaki elastisite modülü, doğrusal ısı genleşme

katsayısı ve Poisson oranını ifade etmektedir. T , kanatçık üzerindeki sıcaklık, u ise radyal yer değiştirmeyi göstermektedir.

(1), (2) ve (4) numaralı denklemler, gerilme-gerinim denge denkleminde (3) yerine yazılırsa, yer değiştirme için ikinci dereceden homojen olmayan adi diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u'' + A_1(r)u' + A_2(r)\frac{u}{r} = A_3(r)T + A_4(r)T' \quad (7)$$

Yukarıdaki denklemde geçen $A_1(r)$, $A_2(r)$, $A_3(r)$ ve $A_4(r)$ fonksiyonları aşağıdaki ifadelere eşittir:

$$A_1(r) = \frac{E'(r)}{E(r)} + \frac{(v^2(r))'}{1 - v^2(r)} + \frac{1}{r}$$

$$A_2(r) = \left(\frac{E'(r)}{E(r)} + \frac{(v^2(r))'}{1 - v^2(r)} \right) v(r) + v'(r) - \frac{1}{r}$$

$$A_3(r) = \left[\left(\frac{E'(r)}{E(r)} + \frac{(v^2(r))'}{1 - v^2(r)} \right) (1 + v(r)) + v'(r) \right] \alpha(r) + (1 + v(r))\alpha'(r)$$

$$A_4(r) = (1 + v(r))\alpha(r).$$

(1) numaralı gerilme-gerinim denklemi (5) ve (6) numaralı sınır şartlarında yerine yazılırsa yer değiştirmeye bağlı sınır koşulları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left[u' + v(r)\frac{u}{r} \right]_{r=a} = [(1 + v(r))\alpha(r)T(r)]_{r=a} \quad (8)$$

$$\left[u' + v(r)\frac{u}{r} \right]_{r=b} = [(1 + v(r))\alpha(r)T(r)]_{r=b} \quad (9)$$

Sıcaklık Dağılımını Tarif Eden Denklemler

Problemde, ısı transferinin iletim ve taşınım ile gerçekleştiği, iç ısı üretimi veya tüketiminin ihmal edildiği, çevre sıcaklığının sabit olduğu ve kanatçığın kararlı duruma ulaştığı varsayılmıştır. Bu koşullar altında eksenel simetrik, ince bir dairesel kanatçık için enerji denge denklemi ve sınır koşulları (Çengel, 2003),

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(k(r)r \frac{dT}{dr} \right) - \frac{2h}{\delta} (T - T_\infty) = 0 \quad (10)$$

$$T(a) = T_b \quad (11)$$

$$T'(b) = 0 \quad (12)$$

şeklinde. (10) numaralı enerji denge denklemini diferansiyel formda yazılırsa yeni enerji denge denklemi ve sınır şartları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{d^2 T_n}{dr^2} + B_1(r) \frac{dT_n}{dr} - B_2(r)T_n = 0 \quad (13)$$

$$T_n(a) = T_b - T_\infty \quad (14)$$

$$T_n'(b) = 0 \quad (15)$$

Bu diferansiyel denklemin değişken katsayıları $B_1(r)$, $B_2(r)$ ve T_n ifadeleri aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$B_1(r) = \left(\frac{k'(r)}{k(r)} + \frac{1}{r} \right)$$

$$B_2(r) = \frac{2h}{\delta k(r)}$$

$$T_n = T - T_\infty$$

Burada, $k(r)$ kanatçık üzerinde herhangi bir noktadaki ısı iletkenliği, h ısı transfer katsayısını, δ kanatçık kalınlığını, T_∞ çevre sıcaklığını, T_b ise kanatçık taban sıcaklığını temsil etmektedir.

Üstel Derecelendirilmiş Kanatçık

Tabanı tamamen seramik, uç kısmı ise tamamen metal olacak şekilde derecelendirilen kanatçığın elastisite modülünün, Poisson oranının, lineer ısı genleşme katsayısının ve ısı iletkenliğinin radyal yönde üstel bir fonksiyonla değiştiği varsayılmış ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$k(r) = k_c e^{\gamma \left(\frac{r-a}{b-a} \right)} \quad (16)$$

$$E(r) = E_c e^{\beta \left(\frac{r-a}{b-a} \right)} \quad (17)$$

$$\alpha(r) = \alpha_c e^{\lambda \left(\frac{r-a}{b-a} \right)} \quad (18)$$

$$v(r) = v_c e^{\psi \left(\frac{r-a}{b-a} \right)} \quad (19)$$

Homojensizlik katsayıları $(\gamma, \beta, \lambda, \psi)$ kanatçıkta kullanılan seramik ve metal malzemelerin özelliklerine göre aşağıdaki bağıntılar kullanılarak hesaplanabilir:

$$\gamma = \ln \left(\frac{k_m}{k_c} \right), \quad \beta = \ln \left(\frac{E_m}{E_c} \right), \quad \lambda = \ln \left(\frac{\alpha_m}{\alpha_c} \right), \quad \psi = \ln \left(\frac{v_m}{v_c} \right).$$

Pseudospectral Chebyshev Yöntemi (PCY)

Pseudospectral Chebyshev yöntemi, bir veya birden fazla bağımsız değişkene göre elde edilmiş diferansiyel denklemi doğrusal veya doğrusal olmayan denklem sistemine dönüştüren bir yöntemdir (Bazan, 2008; Gottlieb, 1981; Trefethen, 2000). Daha az sayıda nokta kullanarak yüksek hassasiyet elde etme esasına dayanan bu yöntemdeki örgü noktaları, sınıra yakın bölgelerde orta noktalara göre daha sık olacak şekilde seçilir. Bu tanıma uyan, yani sınır noktalarında daha fazla örgü noktalarına sahip olan Chebyshev noktaları

$$x_j = \cos \left(\frac{j\pi}{N} \right), \quad j = 0, 1, 2, 3 \dots N \quad (20)$$

kullanılarak birinci dereceden Chebyshev türevleme matrisi D hesaplanabilir. Elde edilen Chebyshev türevleme matrisi ile vektörün sonlu sayıda çarpımı ile vektörün türevleri $V'(x_j) = (DV)_j$, $V''(x_j) = (D^2V)_j \dots$ yüksek hassasiyetle elde edilir. Burada $V = [V_0 \dots V_n]^T$, x_j noktalarındaki vektör verileridir.

Chebyshev türevleme matrisinin hesaplama süreci ve m-dosyası Trefethen (Trefethen, 2000) tarafından verilmiş, bölüntüleme noktaları x_j sağdan sola numaralanmış ve $[-1,1]$ aralığında tanımlanmıştır. Matlab m-dosyasında küçük bir uyarılama ile herhangi bir aralıktaki D türevleme matrisi hesaplanabilir.

Sıcaklık Dağılımının PCY İle Elde Edilmesi

İşlevsel derecelendirilmiş bir kanatçığa ait enerji denge denkleminin (13) birinci ve ikinci mertebeden türevleri, Chebyshev türevleme matrisi kullanılarak

$$\begin{bmatrix} \frac{dT_n}{dr}(r_{10}) \\ \frac{dT_n}{dr}(r_{11}) \\ \vdots \\ \frac{dT_n}{dr}(r_{1n}) \end{bmatrix} \approx D \begin{bmatrix} T_n(r_{10}) \\ T_n(r_{11}) \\ \vdots \\ T_n(r_{1n}) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{dT_n^2}{d^2r}(r_{10}) \\ \frac{dT_n^2}{d^2r}(r_{11}) \\ \vdots \\ \frac{dT_n^2}{d^2r}(r_{1n}) \end{bmatrix} \approx D^2 \begin{bmatrix} T_n(r_{10}) \\ T_n(r_{11}) \\ \vdots \\ T_n(r_{1n}) \end{bmatrix} \quad (21)$$

ayrıklaştırılırsa, sistemi temsil eden diferansiyel denklem,

$$L_1 T_n = 0 \quad (22)$$

şeklinde doğrusal denklem sistemine dönüşür. Bu denklem sistemine, sıcaklık sınır koşulları (14-15) uygulanırsa aşikar olmayan çözüm elde edilir. Burada geçen L_1 doğrusal işleci (operatörü) aşağıdaki ifadeye eşittir.

$$L_1 = D^2 + B_1(r)D - B_2(r)$$

Gerilme Dağılımlarının PCY İle Elde Edilmesi

İşlevsel derecelendirilmiş kanatçık için elde edilen yer değiştirmelere bağlı diferansiyel denkleminde (7) yer alan birinci ve ikinci mertebeden türevler Chebyshev türevleme matrisi kullanılarak ayrıklaştırılırsa, sistemi modelleyen boyutsuz diferansiyel denklem,

$$L_2 u = RHS(r) \quad (23)$$

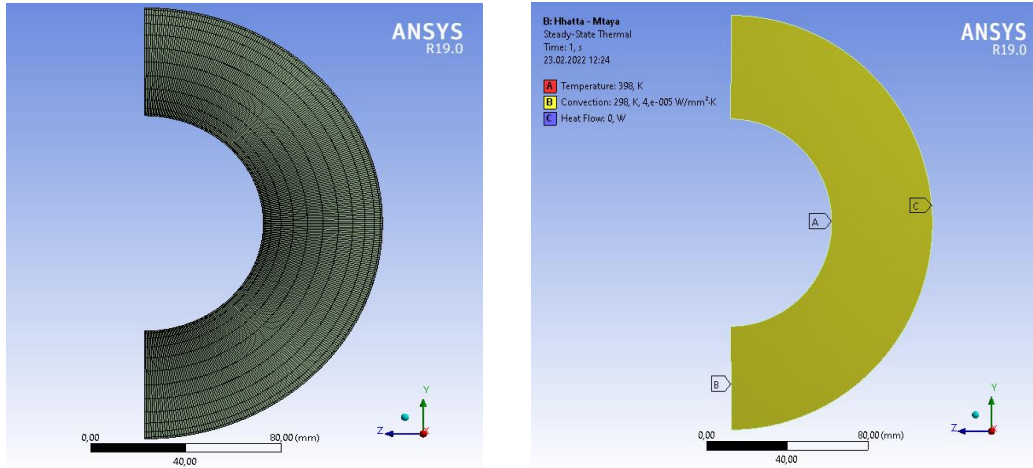
gibi sıcaklık denkleminde benzer şekilde bir doğrusal denklem sistemine dönüşür. Denklem sistemine, (8) ve (9)'da verilen mekanik sınır koşulları uygulanırsa aşikar olmayan çözüme ulaşılabacaktır. L_2 doğrusal işleci ve $RHS(r)$ sağ taraf fonksiyonu olup aşağıdaki verilen ifadelerle eşittir.

$$L_2 = D^2 + A_1(r)D + \frac{A_2(r)}{r}$$

$$RHS = A_3(r)T + A_4(r)T'$$

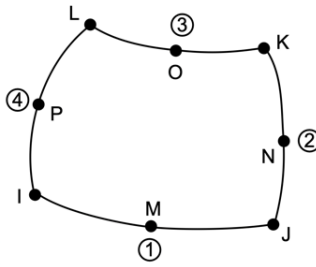
Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Modelleme

Aynı problem, Ansys R19.0 paket programı kullanarak sonlu elemanlar yöntemi ile de çözülmüştür. İşlevsel derecelendirilmiş kanatçık, Ansys Composite Prepost (ACP) modülü kullanılarak ilgili sınır koşulları altında Şekil 2'deki gibi modellenmiştir.

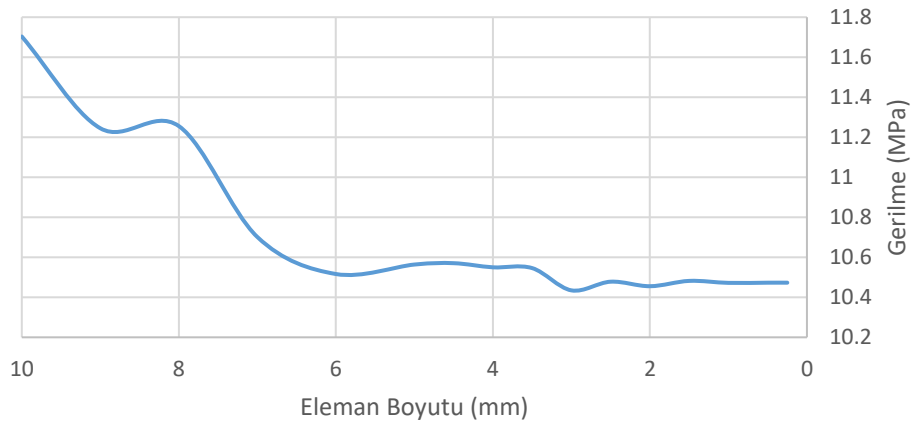


Şekil 2. Isıl Ağ Modeli ve Sınır Koşulları

Kanatçık üzerindeki ısıl gerilmeleri tespit etmek için yapısal analiz (Static Structural) modülü kullanılmıştır. Bu model ağ yapısında Şekil 3’de şematik gösterimi verilen Plane183 2D (8 düğüm noktalı) yapısal eleman kullanılmıştır. Ağ bağımsızlık analizleri gerçekleştirilmiş, çözüm süresi ve sonuçlar değerlendirilerek modelde mesh boyutu 2 mm olarak seçilmiştir. Ağ yakınsama analizine ilişkin grafik Şekil 4’de verilmiştir.

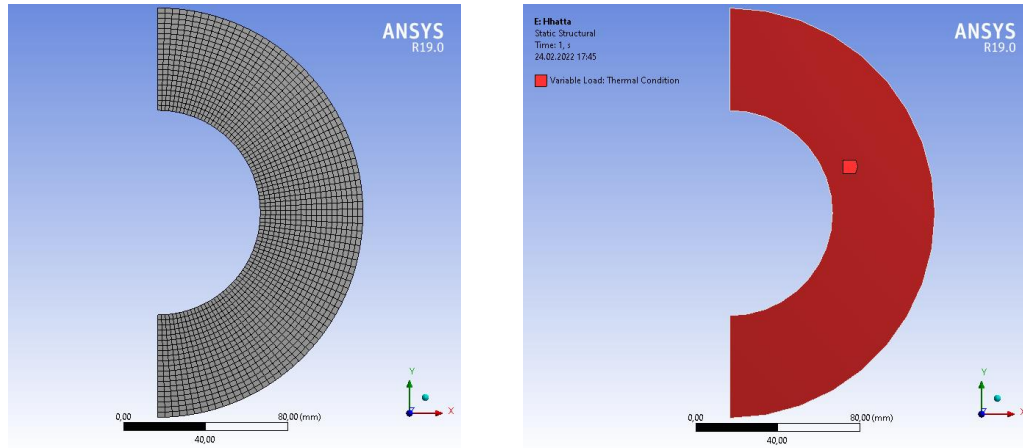


Şekil 3. 8 Düğüm Noktalı Düzlem Eleman (Plane 183 2D)



Şekil 4. Ağ Bağımsızlık Analizi

Toplam 18840 eleman ve 24570 düğüm noktası bulunmaktadır. Sınır koşulları için ısıl analizden elde edilen sıcaklık dağılımı ve simetri serbestlik koşulları uygulanmıştır. Model ağ yapısı ve sınır koşulları Şekil 5’te verilmiştir.



Şekil 5. Yapısal Ağ Modeli ve Sınır Koşulları

BULGULAR VE TARTIŞMA

Üstel dereceli, eksenel simetrik, dikdörtgen profilli dairesel kanatçıktaki sıcaklık dağılımları ve ısı gerilmeleri pseudospectral Chebyshev ve sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Isıl dengedeki kanatçıktaki ısı ile ısı kaybının olmadığı, çevre sıcaklığının sabit olduğu, iç ısı üretimi ve tüketiminin olmadığı, iç kuvvetlerin olmadığı ve kanatçık yüzeylerinde etkileşim olmadığı varsayılmıştır. Çözümleme için ele alınan malzeme çiftinin mekanik ve ısı özellikleri Tablo 1’de verilmiştir. Önerilen pratik sayısal yöntemin (PCY) doğruluğu, elastisite modülü, ısı iletkenlik katsayısı ve doğrusal ısı genleşme katsayılarının radyal doğrultuda kuvvet fonksiyonu ile değiştiği, Poisson oranının ise sabit olduğu varsayılan analitik çalışma (Yıldırım et al., 2019a) kullanılarak test edilmiştir. Çalışmada kullanılan İD malzeme modeli için PCY çözümü yapılmış ve analitik çözüm ile kıyaslaması Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 1. Dairesel Kanatçık Derecelendirmesinde Kullanılan Malzemelerin Özellikleri (Reddy & Chin, 1998)

	Malzeme	E (GPa)	ν	k (W/(mK))	α (1/K $\times 10^{-6}$)
Seramik	ZrO_2	168,4	0,298	1,78	1,848
Metal	$Ti - 6Al - 4V$	116,7	0,312	7,5	9,5

Tablo 2. Sayısal Yöntemin Yıldırım, et al. (2019a) Tarafından Yapılan Analitik Çalışma İle Karşılaştırması

θ		$S_r \times 10^{-5}$		$S_\phi \times 10^{-4}$	
Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik
1	1	0	0	0,312170	0,312171
1,017037	0,987543	0,052876	0,052874	0,318260	0,318260
1,066987	0,955278	0,199191	0,199191	0,312393	0,312394
1,146447	0,914680	0,385931	0,385930	0,260485	0,260485
1,250000	0,876400	0,530987	0,530987	0,164989	0,164989
1,370590	0,846249	0,580148	0,580148	0,055160	0,055160
1,500000	0,825457	0,533702	0,533703	-0,042886	-0,042886
1,629410	0,812681	0,426001	0,426001	-0,117954	-0,117954
1,750000	0,805729	0,296541	0,296542	-0,170007	-0,170007
1,853553	0,802494	0,175191	0,175190	-0,203593	-0,203593
1,933013	0,801317	0,080008	0,080008	-0,223738	-0,223738
1,982963	0,801049	0,020272	0,020272	-0,234300	-0,234300
2,000000	0,801031	0	0,000000	-0,237570	-0,237570

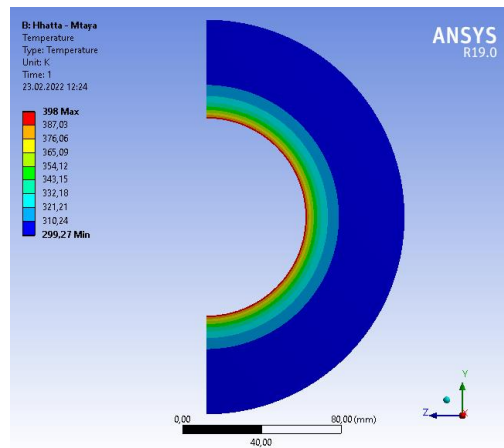
Kıyaslama sonuçları incelendiğinde, PCY ile 12 bölüntü (13 örgü noktası) kullanıldığında virgülden sonra 5 basamağa kadar hassasiyet sağlandığı gözlemlenmiştir. Ayrıca, bölüntü sayısının sonuçları nasıl etkilediğini göstermek için üstel derecelendirilmiş kanatçık için bölüntü sayısı etki tablosu oluşturulmuştur. Tablo 3’de görüleceği üzere 12 bölüntüden sonraki radyal gerilme ve teğetsel gerilmede sonuçlarında virgülden sonra dokuzuncu basamakta, sıcaklık da ise virgülden sonra yedinci basamakta değişim olmaktadır. Yeterli hassasiyet sağlandığından çözümlemelere 12 bölüntü kullanılarak devam edilmiştir.

Tablo 3. Üstel Derecelendirmenin Kullanıldığı Kanatçık İçin Bölüntü Sayısı Etki Testi

Bölüntü Sayısı	T/T_{∞}	σ_r/E_c	σ_{ϕ}/E_c
4	1,0126087967	-0,0004988887	0,0010186567
6	1,0172717404	-0,0003053532	0,0011972105
8	1,0178608206	-0,0004482885	0,0011544532
10	1,0179127944	-0,0004468064	0,0011553503
12	1,0179164465	-0,0004474895	0,0011551432
14	1,0179166373	-0,0004474852	0,0011551460
16	1,0179166463	-0,0004474867	0,0011551456
18	1,0179166467	-0,0004474867	0,0011551456
20	1,0179166467	-0,0004474867	0,0011551456

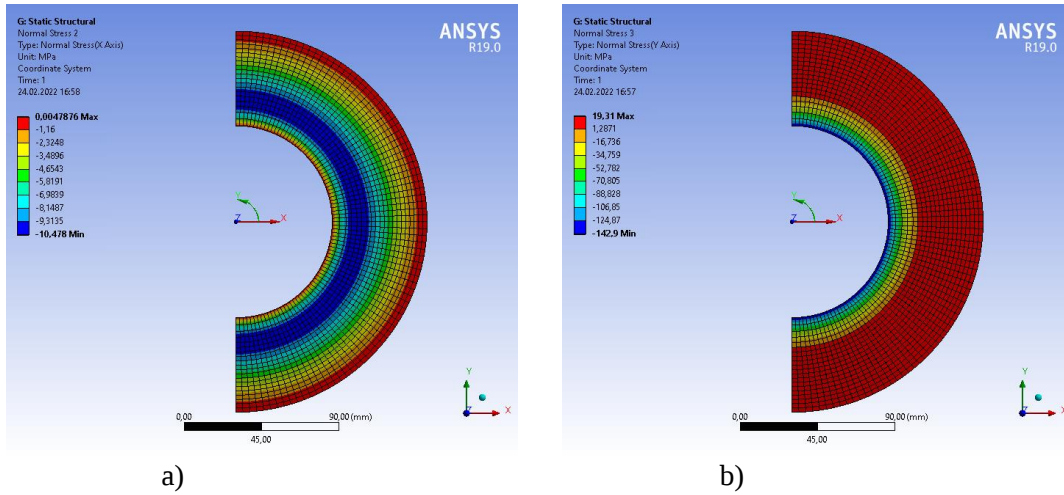
Tablo 1’de verilen seramik-metal malzemeler ile oluşturulmuş dereceli kanatçığa ait sonlu elemanlar yöntemi çözümlerinden elde edilen boyutsuz sıcaklık Şekil 6’da, boyutsuz radyal ve teğetsel gerilme ise Şekil 7a ve Şekil 7b’de sunulmuştur.

İlk aşamada ısı analizler durağan durum (Steady-State Thermal) ısı analiz modülü kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Çalışmada incelenen kanatçığın iç çapı $a=0.05$ m, dış çapı $b=0.1$ m, kalınlığı $\delta=2.5 \times 10^{-3}$ m olup ısı taşınım katsayısı $40 \text{ W/m}^2\text{K}$ olarak alınmıştır (Yıldırım et al., 2021). Sınır koşulları ise kanatçık iç kısmında 398 K değerinde, ortam sıcaklığı ise 298 K olup kanatçık uç kısmında ısı izolasyon tanımlanmıştır. Bu koşullar altında model çözümlenmiş ve sıcaklık dağılımları elde edilmiştir. Bu analizler sonunda kanatçık üzerindeki sıcaklık dağılımı Şekil 6’daki gibi elde edilmiştir.



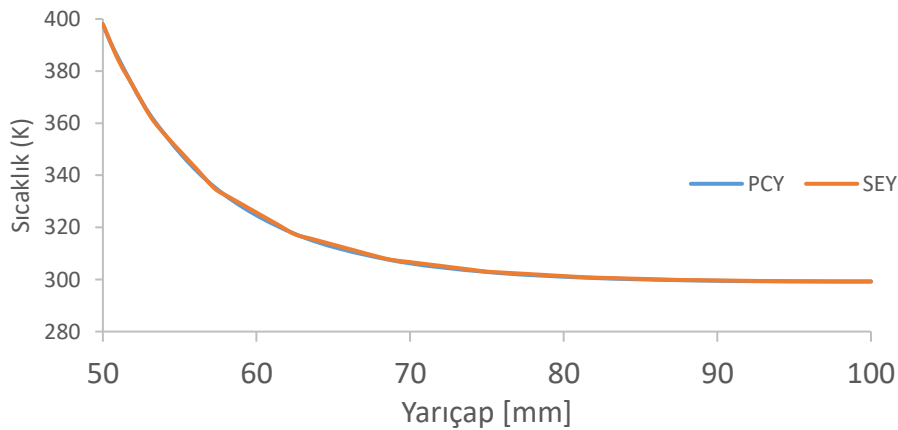
Şekil 6. Sonlu Elemanlar Çözümüne Göre Kanatçık Üzerindeki Sıcaklık Dağılımı

Yapısal model tanımlanan mekanik sınır koşulları altında çözdürülerek radyal ve teğetsel gerilme dağılımları elde edilmiştir. Elde edilen gerilme büyüklükleri Şekil 7 ‘de verilmiştir.

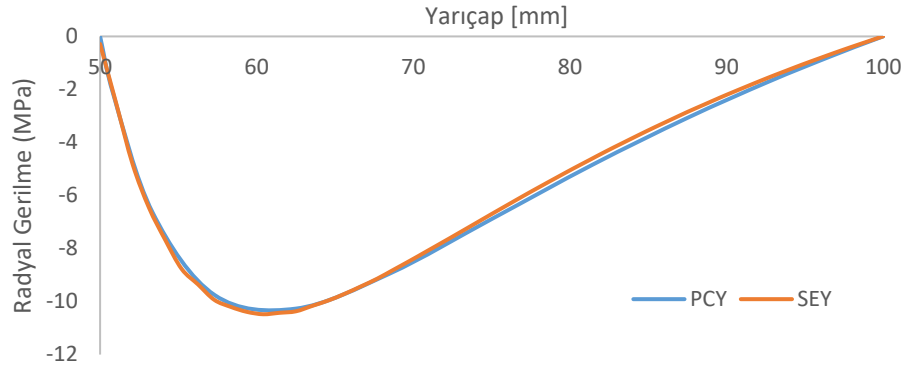


Şekil 7. Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Elde Edilen a) Radyal b) Teğetsel Gerilme Dağılımları

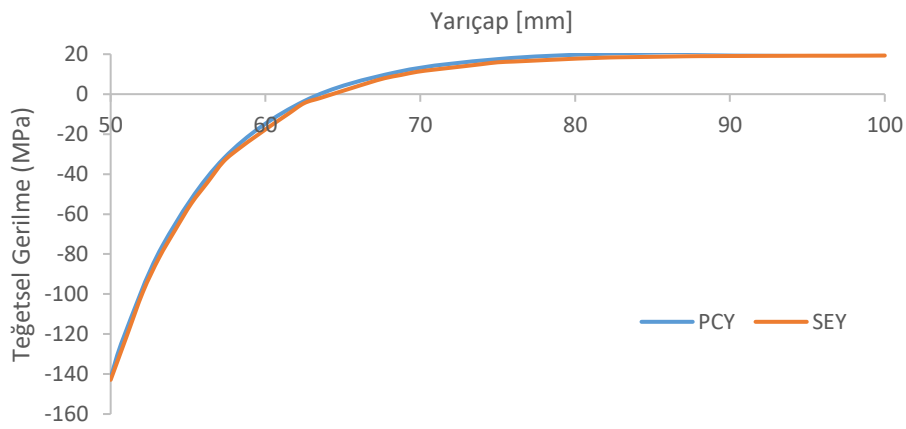
Pseudospektral Chebyshev (PCY) ve sonlu elemanlar yöntemlerinden (SEY) elde edilen sıcaklık, radyal ve teğetsel gerilme dağılımları kıyas yapabilmek adına Şekil 8-10'da grafik olarak sunulmuştur. Şekil 8'de verilen sıcaklık dağılımı eğrilerine göre kanatçık tabanından etkiyen sıcaklık, kanatçık ucuna doğru ortam sıcaklığına yakınsamaktadır. Her iki sayısal yöntemle elde edilen sıcaklık dağılımı eğrileri oldukça iyi şekilde örtüşmektedir. Şekil 9 kanatçığa ait radyal gerilme dağılımlarını göstermektedir. Kanatçığın tabanında ve uç kısımlarında herhangi bir traksiyon olmadığından dolayı bu noktalarda radyal gerilme değerleri sıfır olarak elde edilmektedir. Ancak tabandan uç kısma doğru gidildikçe radyal gerilmede hızla bir artış görülmekte ve 60 mm civarlarında en büyük değerine ulaşmaktadır. Bu noktadan sonra gerilme değeri doğrusal bir azalma eğilimi göstermektedir. Bu sonuçlar her iki çözüm için de geçerlidir. Dairesel kanatçık için en yüksek değerlere sahip olan teğetsel gerilme dağılımları ise Şekil 10'da sunulmuştur. Tabanda yüksek sıcaklık sınır koşulundan dolayı basma yönünde en yüksek teğetsel gerilme değerlerine ulaşılırken, bu değer tabandan uzaklaştıkça hızla azalmakta ve yaklaşık 64 mm civarında sıfır olmaktadır. Bu noktadan sonra nispeten düşük değerlerde çekme yönüne dönen teğetsel gerilmeler uç kısma yaklaştıkça sabit bir değere yakınsamaktadır. PCY ve SEY çözümleri teğetsel gerilme sonuçları için de birbirileri ile oldukça uyumlu sonuçlar verdiği gözlenmektedir.



Şekil 8. Pseudospektral Chebyshev ve Sonlu Elemanlar Yöntemlerinden Elde Edilen Sıcaklık Dağılımları



Şekil 9. Pseudospektral Chebyshev ve Sonlu Elemanlar Yöntemlerinden Elde Edilen Radyal Gerilme Dağılımları



Şekil 10. Pseudospektral Chebyshev ve Sonlu Elemanlar Yöntemlerinden Elde Edilen Teğetsel Gerilme Dağılımları

SONUÇ

Bu çalışmada, mekanik ve ısı özellikleri radyal eksen boyunca üstel bir fonksiyonla değişen, eksenel simetrik, ince, dikdörtgen profilli dairesel bir kanatçıktaki sıcaklık dağılımı ve sıcaklık farklarından dolayı oluşan ısı gerilmeleri, pseudospektral Chebyshev ve sonlu elemanlar yöntemleri kullanılarak ele alınmıştır. Tabanda sabit bir sıcaklığa maruz derecelendirilmiş kanatçıktaki sıcaklık dağılımı ve ısı gerilme problemi her iki sayısal yöntem ile ayrı ayrı çözülmüş ve önerilen PSY çözümünün sonlu elemanlar çözümüne yakınsaklığı görülmüştür. Bu çalışma neticesinde elde edilen sonuçlar şöyle sıralanabilir:

- Yüksek taban sıcaklığına maruz işlevsel derecelendirilmiş kanatçıklarda, en yüksek sıcaklık ve teğetsel gerilme taban civarında elde edilirken, en büyük radyal gerilme değerine tabandan bir miktar uzakta ulaşılmaktadır.
- Pseudospektral Chebyshev yöntemi ve sonlu elemanlar yönteminin, İD dairesel kanatçıklarda sıcaklık dağılımı ve ısı gerilmelerin hesaplanmasında oldukça iyi sonuçlar verdiği gözlenmiştir.
- Sonlu elemanlar yöntemi ile çözümde yüzlerce düğüm noktasına ihtiyaç duyulurken, pseudospektral Chebyshev yönteminde oldukça benzer sonuçlar 12 düğüm noktası ile elde edilebilmiştir. Bu nedenle pseudospektral Chebyshev yöntemi bu tür problemlerin çözümünde sonlu elemanlar yöntemine göre daha hızlı ve kolay bir yol sunmaktadır.

KAYNAKLAR

- Arslantürk, C. (2009). Correlation equations for optimum design of annular fins with temperature dependent thermal conductivity. *Heat Mass Transfer*, 45(4), 519-525. <https://doi.org/10.1007/s00231-008-0446-9>
- Aziz, A., Torabi, M., & Zhang, K. (2013). Convective–radiative radial fins with convective base heating and convective–radiative tip cooling: homogeneous and functionally graded materials. *Energy Conversion and Management*, 74, 366-376. <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2013.05.034>
- Aziz, A., & Fang, T. (2010). Alternative solutions for longitudinal fins of rectangular, trapezoidal, and concave parabolic profiles. *Energy Conversion and Management*, 51(11), 2188-2194. <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2010.03.012>
- Aziz, A., & Rahman, M. M. (2009). Thermal performance of a functionally graded radial fin. *International Journal of Thermophysics*, 30(5), 1637-1648. <https://doi.org/10.1007/s10765-009-0627-x>
- Bazán, F. S. (2008). Chebyshev pseudospectral method for computing numerical solution of convection–diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation*, 200(2), 537-546. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.11.026>
- Cengel, Y. A. (2003). Heat transfer: A practical approach 2nd ed., McGraw-Hill, New York.
- Gaba, V. K., Tiwari, A. K., & Bhowmick, S. (2016). Performance of functionally graded exponential annular fins of constant weight. In *Advances in Functionally Graded Materials and Structures*. London, UK: IntechOpen. <https://doi.org/10.5772/63100>
- Gaba, V. K., Tiwari, A. K., & Bhowmick, S. (2014). Thermal performance of functionally graded parabolic annular fins having constant weight. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 28(10), 4309-4318. <https://doi.org/10.1007/s12206-014-0945-1>
- Gardner, K. A. (1945). Efficiency of extended surface. *Transactions of ASME*, 67, 621-631.
- Gottlieb, D. (1981). The stability of pseudospectral-Chebyshev methods. *Mathematics of Computation*, 36(153), 107-118. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1981-0595045-1>
- Iborra, A. A., & Campo, A. (2009). Approximate analytic temperature distribution and efficiency for annular fins of uniform thickness. *International Journal of Thermal Sciences*, 48(4), 773-780. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2008.05.012>
- Bergman, T. L., Bergman, T. L., Incropera, F. P., Dewitt, D. P., & Lavine, A. S. (2011). *Fundamentals of heat and mass transfer*. John Wiley & Sons.
- Khan, W. A., & Aziz, A. (2012). Transient heat transfer in a functionally graded convecting longitudinal fin. *Heat and Mass Transfer*, 48(10), 1745-1753. <https://doi.org/10.1007/s00231-012-1020-z>
- Kraus, A. D., Aziz, A., Welty, J., & Sekulic, D. P. (2001). Extended surface heat transfer. *Applied Mechanics Review*. 54(5), B92-B92. <https://doi.org/10.1115/1.1399680>
- Koizumi, M. F. G. M. (1997). FGM activities in Japan. *Composites Part B: Engineering*, 28(1-2), 1-4. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(96\)00016-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00016-9)
- Kundu, B. (2017). Exact method for annular disc fins with heat generation and nonlinear heating. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 31(2), 337-345. <https://doi.org/10.2514/1.T4977>
- Lee, H. L., Chang, W. J., Chen, W. L., & Yang, Y. C. (2012). Inverse heat transfer analysis of a functionally graded fin to estimate time-dependent base heat flux and temperature distributions. *Energy Conversion and Management*, 57, 1-7. <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2011.12.002>
- Mallick, A., Ghosal, S., Sarkar, P. K., & Ranjan, R. (2015). Homotopy perturbation method for thermal stresses in an annular fin with variable thermal conductivity. *Journal of Thermal Stresses*, 38(1), 110-132. <https://doi.org/10.1080/01495739.2014.981120>
- Miyamoto, Y., Kaysser, W. A., Rabin, B. H., Kawasaki, A. & Ford, R. G. (1999). *Functionally Graded Materials Design Process and Applications*, Springer, USA.

- Peng, H. S., & Chen, C. L. (2011). Hybrid differential transformation and finite difference method to annular fin with temperature-dependent thermal conductivity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54(11-12), 2427-2433. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2011.02.019>
- Ranjan, R., Mallick, A., & Jana, P. (2019). Thermoelastic study of a functionally graded annular fin with variable thermal parameters using semiexact solution. *Journal of Thermal Stresses*, 42(10), 1272-1297. <https://doi.org/10.1080/01495739.2019.1646617>
- Reddy, J. N., & Chin, C. D. (1998). Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. *Journal of Thermal Stresses*, 21(6), 593-626. <https://doi.org/10.1080/01495739808956165>
- Roy, R., & Ghosal, S. (2017). Homotopy perturbation method for the analysis of heat transfer in an annular fin with temperature-dependent thermal conductivity. *Journal of Heat Transfer*, 139(2), 1223-1231. <https://doi.org/10.1115/1.4034811>
- Timoshenko, S. P. & Goodier, J. N. (1970). *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York.
- Trefethen, L. N. (2000). *Spectral Methods in Matlab* PA, Philadelphia:SIAM.
- Tutuncu, N., & Temel, B. (2013). An efficient unified method for thermoelastic analysis of functionally graded rotating disks of variable thickness. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 20(1), 38-46. <https://doi.org/10.1080/15376494.2011.581413>
- Wang, C. C., Liao, W. J., & Yang, C. Y. (2013). Hybrid spline difference method for heat transfer and thermal stresses in annular fins. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 64(1), 71-88. <https://doi.org/10.1080/10407790.2013.784140>
- Wu, S. S. (1997). Analysis on transient thermal stresses in an annular fin. *Journal of thermal stresses*, 20(6), 591-615. <https://doi.org/10.1080/01495739708956120>
- Yildirim, A., Eker, M., Yarimpabuç, D. & Celebi, K. (2021). Thermal wave propagation in a functionally graded annular fin with fixed base. *Waves in Random and Complex Media*, 1-16. <https://doi.org/10.1080/17455030.2021.1925175>
- Yildirim, A., Yarimpabuç, D., & Celebi, K. (2020). Transient thermal stress analysis of functionally graded annular fin with free base. *Journal of Thermal Stresses*, 43(9), 1138-1149. <https://doi.org/10.1080/01495739.2020.1770644>
- Yıldırım, A., Yarimpabuç, D., & Celebi, K. (2019a). Thermal stress analysis of functionally graded annular fin. *Journal of Thermal Stresses*, 42(4), 440-451. <https://doi.org/10.1080/01495739.2018.1469963>
- Yıldırım, A., Celebi, K., & Yarimpabuç, D. (2019b). A practical approach for thermal stress of functionally graded annular fin. *Journal of Engineering Thermophysics*, 28(4), 556-568. <https://doi.org/10.1134/S1810232819040118>
- Yontar, O., Aydin, K., & Keles, I. (2020). Practical jointed approach to thermal performance of functionally graded material annular fin. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 34(1), 144-149. <https://doi.org/10.2514/1.T5808>